1.3.8 Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici I

Předpoklady: 010307

Opakování:
K veličinám popisujícím posuvný pohyb existují analogické veličiny popisující pohyb po kružnici:

posuvný pohyb	pojítko	pohyb po kružnici
dráha s $[\mathrm{m}]$	$s=\varphi r$	úhel $\varphi[\mathrm{rad}]$
rychlost v $[\mathrm{m/s}]$ $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v=\omega r$	úhlová rychlost $[\mathrm{rad/s}]$ $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Rovnoměrný pohyb i rovnoměrný pohyb po kružnici popisují analogické vzorce:

rovnoměrný posuvný pohyb	rovnoměrný pohyb po kružnici
$v=\text{konstanta}$	$\omega=\text{konstanta}$
$s=s_0+vt$	$\varphi=\varphi_0+\omega t$

Navíc pro pohyb po kružnici: $T=\frac{1}{f}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$

Př. 1: Řezný kotouč pily se naprázdno otáčí s rychlostí $3000\,\mathrm{ot/min}$. Urči periodu, frekvenci, úhlovou rychlost jeho otáčení. Jakou rychlostí se pohybuje zub na kraji kotouče, jestliže kotouč má průměr 45 cm? Při řezání klesne rychlost otáčení o třetinu. Kolikrát se kotouč pily otočí, než přeřízne prkno, jestliže řezání trvá 15 sekund? Jakou vzdálenost během řezání urazí zub na kotouči?

$\omega=\frac{3000\,\mathrm{ot}}{1\,\mathrm{min}}=\frac{3000\cdot 2\pi\,\mathrm{rad}}{60\,\mathrm{s}}=314\,\mathrm{rad/s}$, $t=15\,\mathrm{s}$, $d=45\,\mathrm{cm}=0{,}45\,\mathrm{m}\Rightarrow r=0{,}23\,\mathrm{m}$,

$T=?$, $f=?$, $v=?$, $n=?$, $s=?$

$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{314}\,\mathrm{s}=0{,}02\,\mathrm{s}$

$\omega=2\pi f\Rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{314}{2\pi}\,\mathrm{Hz}=50\,\mathrm{Hz}$

$v=\omega r=314\cdot 0{,}23\,\mathrm{m/s}=72\,\mathrm{m/s}=260\ \mathrm{km/h}$

$\omega_2=\frac{2}{3}\omega=\frac{2}{3}\cdot 314=209\,\mathrm{rad/s}$

$\varphi=\omega_2 t=209\cdot 15\,\mathrm{rad}=3140\,\mathrm{rad}$

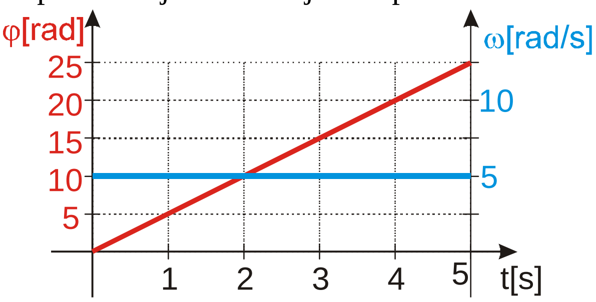
$n=\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{3140}{2\pi}\,\mathrm{ot}=500\,\mathrm{ot}$

~~[TB1]~~ $s=\varphi r=3140\cdot 0{,}23\,\mathrm{m}=720\,\mathrm{m}$

Kotouč pily se pohybuje s periodou 0,02 s a frekvencí 50 Hz. Zub na kraji kotouče se pohybuje rychlostí 72 m/s. Během řezání se kotouč pily otočí 500 krát a urazí při tom dráhu 720 m.

Př. 2: Nakresli do jednoho obrázku grafy závislosti uraženého úhlu a úhlové rychlosti na čase pro kolotoč, který se rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí $5\,\mathrm{rad/s}$.

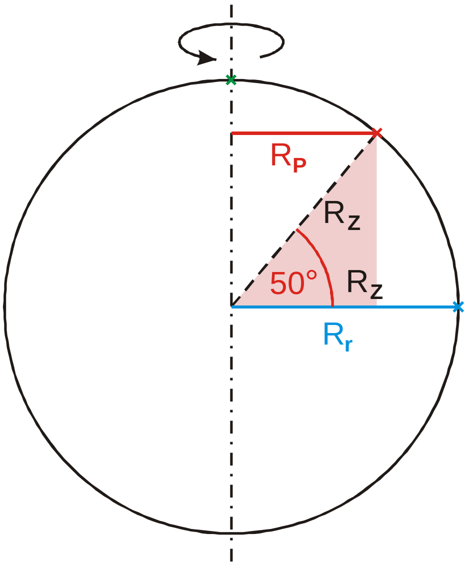
Naprosto stejná situace jako u přímočarého rovnoměrného pohybu.



Uražený úhel rovnoměrně roste, úhlová rychlost se nemění.

Př. 3: Vypočti úhlovou rychlost, kterou se pohybuje člověk stojící na povrchu Země ($R_Z = 6378\,\mathrm{km}$) kvůli její rotaci kolem osy. Pomocí této rychlosti urči obvodovou rychlost, kterou se pohybuje člověk, který stojí:
a) na rovníku b) v Praze ($50°$ severní šířky) c) na pólu.
Jak je možné, že tuto rychlost nepociťujeme?

$R_Z = 6378\,\mathrm{km} = 6378000\,\mathrm{m} = R_r$ $T = 1\,\mathrm{den} = 24\,\mathrm{h} = 86400\,\mathrm{s}$



Kolmá vzdálenost Prahy od osy otáčení Země:

$$\frac{R_P}{R_Z} = \cos 50° \Rightarrow R_P = R_Z \cdot \cos 50° = 6378 \cdot \cos 50° = 4100\,\mathrm{km}.$$

Kolmá vzdálenost pólu od osy otáčení Země: $R_t = 0\,\mathrm{m}$.

Všechny body na Zemi se otáčí se stejnou úhlovou rychlostí. Obvodovou rychlost určíme pomocí vztahu $v = \omega r$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86\,400}\,\mathrm{rad/s} = 0{,}0000727\,\mathrm{rad/s}$$

a) $v_r = \omega R_r = 0{,}0000727 \cdot 6378000\,\mathrm{m/s} = 464\,\mathrm{m/s}$

b) $v_P = \omega R_P = 0{,}0000727 \cdot 4100000\,\mathrm{m/s} = 298\,\mathrm{m/s}$

c) $v_t = \omega R_t = 0{,}0000727 \cdot 0\,\mathrm{m/s} = 0\,\mathrm{m/s}$ (to jsme ani nemuseli počítat)

a) Člověk na rovníku se kvůli rotaci Země pohybuje rychlostí $464\,\mathrm{m/s}$.

b) Člověk v Praze se kvůli rotaci Země pohybuje rychlostí $298\,\mathrm{m/s}$.

c) Člověk na pólu se kvůli rotaci Země pohybuje rychlostí $0\,\mathrm{m/s}$.

Všechny věci okolo nás se otáčejí ze Zemí $\Rightarrow$ jde o stejnou situaci, jako když se pohybujeme ve vlaku (navíc Země nedrncá).

Žádné kolo se však netočí věčně, musí se občas roztočit a občas zastavit $\Rightarrow$ pohyb po kružnici je v takovém případě zrychlený a úhlová rychlost se během tohoto zrychlování mění.

Př. 4: Na základě analogie s přímočarým zrychlením zapiš definiční vztah pro úhlové zrychlení ε a urči jeho jednotku.

Platí: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $\Rightarrow$ analogicky $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \text{jednotka} = \frac{\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{\text{s}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \text{rad/s}^2$$

Při změně rychlosti otáčení se předmět pohybuje s nenulovým úhlovým zrychlením $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$**. Jednotkou úhlového zrychlení je** rad/s^2**.**

Př. 5: Doplň tabulku s přehledem veličin pro posuvný pohyb a pro pohyb po kružnici.

posuvný pohyb	**pojítko**	**pohyb po kružnici**
dráha s $[\text{m}]$	$s = \varphi r$	úhel $\varphi[\text{rad}]$
rychlost v $[\text{m/s}]$ $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v = \omega r$	úhlová rychlost $[\text{rad/s}]$ $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$
zrychlení a $\left[\text{m/s}^2\right]$ $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$a_t = \varepsilon r$	úhlové zrychlení $\left[\text{rad/s}^2\right]$ $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

V posledním řádku tabulky je uvedeno místo obyčejného zrychlení a **tečné zrychlení** a_t. Více si vysvětlíme příští hodinu. Zatím nám bude stačit, že tečné zrychlení označuje část vektoru zrychlení, která mění velikost rychlosti. To, co jsme si dosud pod pojmem zrychlení představovali, je právě tečné zrychlení (zvětšuje rychlost automobilu na přímé silnici, brzdí krabičku sunoucí se po stole, urychluje padající předměty). Že existuje i „jiné“ zrychlení, se přesvědčíme hned příští hodinu.

Pedagogická poznámka: V klasické učebnici se pojem tečného a normálového zrychlení uvádí ihned po zavedení pojmu zrychlení. V mé praxi se to neosvědčuje, než se žáci dostanou k prvnímu použití normálového zrychlení, uplyne tolik času, že na něj zapomenou. Zde použitý přístup také lépe odpovídá celkovému pojetí učebnice jako cesty, která řeší problémy až ve chvíli, kdy nastanou.

Př. 6: Při zapínaní a vypínání harddisk své otáčky zvětšuje nebo zmenšuje přibližně rovnoměrně. Z klidu se roztočí za 5 s. Vypočti jeho úhlové zrychlení, je-li jeho konstantní rychlost otáčení 7200 ot/min.

$\Delta t = 5\,\mathrm{s}$, $\omega_0 = 0\,\mathrm{rad/s}$, $\omega = 7200\,\mathrm{ot/\,min} = 120\,\mathrm{ot/s} = 240\pi\,\mathrm{rad/s} = 754\,\mathrm{rad/s}$, $\varepsilon = ?$

$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 754 - 0\,\mathrm{rad/s} = 754\,\mathrm{rad/s}$.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{754}{5}\,\mathrm{rad/s^2} = 151\,\mathrm{rad/s^2}$$

Harddisk se roztáčí s úhlovým zrychlením $151\,\mathrm{rad/s^2}$.

Př. 7: Motor roztáčí setrvačník s úhlovým zrychlením $\varepsilon = 0,5\,\mathrm{rad/s^2}$. Za jak dlouho roztočí setrvačník o průměru 1,8 m a hmotnosti 2 t z klidu na rychlost 3000 ot/min?

$\varepsilon = 0,5\,\mathrm{rad/s^2}$, $\omega = 3000\ \mathrm{ot/min} = \dfrac{3000 \cdot 2\pi\,\mathrm{rad}}{60\,\mathrm{s}} = 314\,\mathrm{rad/s}$, $t = ?$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\omega}{\varepsilon} = \frac{314}{0,5}\,\mathrm{s} = 628\,\mathrm{s}$$

Motor roztočí setrvačník za 628 s.

Pedagogická poznámka: Zadání předchozího příkladu obsahuje nepotřebné údaje úmyslně.

Př. 8: Urči přibližně úhlové zrychlení řetízkového kolotoče při roztáčení. Potřebné veličiny odhadni.

Potřebujeme znát:

- frekvenci nebo periodu otáčení kolotoče při plné rychlosti: $T = 4\,\mathrm{s}$,
- dobu, po kterou se kolotoč roztáčí $\Delta t = 25\,\mathrm{s}$.

$T = 4\,\mathrm{s}$, $\Delta t = 25\,\mathrm{s}$, $\varepsilon = ?$

$$T = 4\,\mathrm{s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4}\,\mathrm{rad/s} = 1,57\,\mathrm{rad/s}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1,57}{25}\,\mathrm{rad/s^2} = 0,063\,\mathrm{rad/s^2}$$

Kolotoč se roztáčí s úhlovým rychlením $0,063\,\mathrm{rad/s^2}$.

Př. 9: Urči počáteční úhlovou rychlost cirkulárky, jestliže po třech sekundách rovnoměrného zpomalování s úhlovým zrychlením $\varepsilon = -25\,\mathrm{rad/s^2}$ zpomalí na 235 rad/s. Jaká je původní frekvence jejího pohybu?

$\varepsilon = -25\,\mathrm{rad/s^2}$, $t = 3\,\mathrm{s}$, $\omega = 235\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_0 = ?$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\omega = \varepsilon \cdot \Delta t = -25 \cdot 3\,\mathrm{rad/s} = -75\,\mathrm{rad/s}$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \Rightarrow \omega_0 = \omega - \Delta\omega = 235 - (-75)\,\mathrm{rad/s} = 310\,\mathrm{rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{310}{2\pi}\,\mathrm{Hz} = 49\,\mathrm{Hz}$$

Cirkulárka se otáčela s původní frekvencí 49 Hz.

Shrnutí: Rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici je analogií rovnoměrně zrychleného pohybu.